

### Формула площади круга. Запись, вывод

**Круг** – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Круг радиуса  $R$  с центром  $O$  содержит точку  $O$  и все точки плоскости, находящиеся от точки  $O$  на расстоянии, не большем  $R$ .

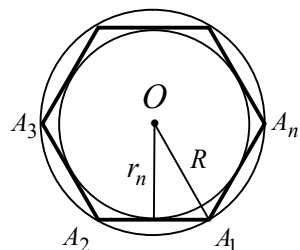


Рис.1

Выведем формулу для нахождения площади круга. Для этого рассмотрим правильный  $n$ -угольник  $A_1A_2...A_n$  вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 1). Площадь  $S$  данного круга больше площади  $S_n$   $n$ -угольника  $A_1A_2...A_n$ , так как  $n$ -угольник полностью содержится в круге, а площадь  $S'_n$  круга, вписанного в  $n$ -угольник, меньше  $S_n$ , так как этот круг полностью содержится

в  $n$ -угольнике, то есть  $S'_n < S_n < S$ .

Известно, что  $r_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$ , где  $r_n$  – радиус вписанной в  $n$ -угольник окружности. Будем неограниченно увеличивать число сторон  $n$ -угольника. При  $n \rightarrow \infty$   $\frac{180^\circ}{n} \rightarrow 0$ , тогда  $\cos \frac{180^\circ}{n} \rightarrow 1$ , поэтому  $r_n \rightarrow R$ . Значит, при неограниченном увеличении числа сторон  $n$ -угольника вписанная в него окружность «стремиться» к описанной окружности, то есть  $S'_n \rightarrow S$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Известно, что  $S_n = \frac{1}{2} P_n r_n$ , где  $S_n$  – площадь правильного  $n$ -угольника,  $P_n$  – его периметр,  $r_n$  – радиус вписанной окружности. Учитывая, что  $r_n \rightarrow R$ ,  $P_n \rightarrow C$ , где  $C$  – длина окружности, ограничивающая круг, то есть  $P_n \rightarrow 2\pi R$ , а  $S_n \rightarrow S$  при  $n \rightarrow \infty$ , получаем, что  $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$ .

**Итак**, для вычисления площади  $S$  круга радиуса  $R$  получили формулу  $S = \pi R^2$ .

Так как  $D = 2R$ , то получаем формулу для вычисления площади круга диаметра  $D$ :

$$S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

**Круговым сектором** называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга (рис. 2).

Выведем формулу для нахождения площади кругового сектора  $S$  радиуса  $R$ , ограниченного дугой с градусной мерой  $\alpha$ .

$\alpha$	$S$
$360^\circ$	$\pi R^2$
$1^\circ$	$\frac{\pi R^2}{360^\circ}$
$\alpha$	$\frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$

**Итак**, площади кругового сектора  $S$  радиуса  $R$ , ограниченного дугой с градусной мерой  $\alpha$ , вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha.$$

**Круговым сегментом** называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 3). Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha \pm S_{\Delta},$$

где  $\alpha$  – градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а  $S_{\Delta}$  – площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «-» надо брать, когда  $\alpha < 180^\circ$ , а знак «+» надо брать, когда  $\alpha > 180^\circ$ .

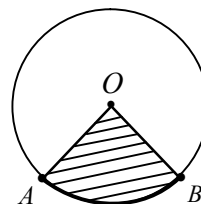


Рис.2

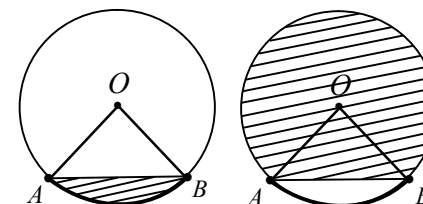


Рис.3

*Замечание.* В течение многих веков математики решали задачу *о квадратуре круга*: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга, но лишь в конце XIX века было доказано, что такое построение невозможно.